УДК 519.865

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА

А.В. Аникина, Н.С. Демин*

Томский политехнический университет
*Томский государственный университет
E-mail: oceanann@rambler.ru

Проводится исследование стоимости опциона, портфеля и капитала для европейского опциона купли с последействием при наличии выплат по дивидендам в случае непрерывного времени.

1. Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стандартном вероятностном пространстве $(\Omega, F_t, \mathbb{F}=(F_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ [1, 2]. Через $\mathbb{P}_t=\mathbb{P}|F_t$ обозначается сужение меры $\mathbb{P}$ на F_t. На финансовом рынке обращаются рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение интервала времени $t\in[0,T]$ определяются уравнениями из [3, 4]

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad dB_t = rB_t dt, \tag{1.1}$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, $\sigma>0$, $r>0$, $S_0>0$, $B_0>0$, решение которых имеет вид

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - (\sigma^2/2))t + \sigma W_t\},\ B_t = B_0 \exp\{rt\}. \tag{1.2}$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде [1, 2]

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \tag{1.3}$$

где $\pi_t=(\beta_t,\gamma_t)$ пара F_t – измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. За обладание акцией происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, пропорциональной рисковой части капитала с коэффициентом δ, таким, что $0\leq\delta<r$, т.е.

$$dD_t = \delta\gamma_t S_t dt. \tag{1.4}$$

Тогда изменение капитала в задаче с дивидендами происходит в виде

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + dD_t. \tag{1.5}$$

Из (1.3) следует, что

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t. \tag{1.6}$$

Тогда согласно (1.5), (1.6), $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = dD_t$, что является балансовым соотношением, заменяющим условие самофинансируемости в стандартной задаче [3]. Из (1.1), (1.3)–(1.5) следует, что капитал определяется уравнением

$$dX_t = rX_t dt + \sigma\gamma_t S_t dW_t^{\mu-r+\delta},$$
$$W_t^{\mu-r+\delta} = W_t + (\mu - r + \delta)t/\sigma. \tag{1.7}$$

Далее нам потребуется результат, связанный с преобразованием мер вида

$$d\mathbb{P}_t^* = Z_t d\mathbb{P}_t, \tag{1.8}$$

математические ожидания относительно которых $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}^*$ соответственно.

Теорема Гирсанова [1, 2]. Пусть Y_t – диффузионный процесс, определяемый уравнением

$$dY_t = b(t,Y_t)dt + dW_t,$$

где W_t – винеровский процесс. Пусть

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t b(\tau,Y_\tau)dW_\tau - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(\tau,Y_\tau)d\tau\right\},$$

причем

$$\mathbb{E}Z_t = 1. \qquad (1.9)$$

Тогда процесс Y_t является винеровским относительно меры $\mathbb{P}^*$.

Пусть $Y_t=W_t^{\mu-r+\delta}$. Согласно (1.7)

$$dY_t = dW_t^{\mu-r+\delta} = ((\mu-r+\delta)/\sigma)dt + dW_t. \qquad (1.10)$$

Так как, согласно (1.10), $b(\tau,Y_t)=(\mu-r+\delta)/\sigma$, то

$$Z_t = Z_t^{\mu-r+\delta} = \exp\left\{-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2 t\right\}.$$

Так как

$$\mathbb{E}\exp\{\sigma W_t\} = \exp\{(\sigma^2 t)/2\},$$

то $\mathbb{E}Z_t^{\mu-r+\delta}=1$, т.е. условие (1.9) для $Z_t^{\mu-r+\delta}$ выполняется.

Пусть $\mathbb{P}^*=\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}$, определяемая преобразованием $d\mathbb{P}_t^{\mu-r+\delta}=Z_t^{\mu-r+\delta}d\mathbb{P}_t$, и пусть $\mathbb{E}^*=\mathbb{E}^{\mu-r+\delta}$. Тогда, согласно теореме Гирсанова, процесс $W_t^{\mu-r+\delta}$ вида (1.7) является винеровским относительно меры $\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}$, т.е. для $t>\tau$, $\mathbb{E}^{\mu-r+\delta}(W_t^{\mu-r+\delta}-W_\tau^{\mu-r+\delta}|F_\tau)=0$, $\mathbb{E}^{\mu-r+\delta}([W_t^{\mu-r+\delta}-W_\tau^{\mu-r+\delta}]^2|F_\tau)=t-\tau$. Таким образом, обозначая через $Law(\cdot|\mathbb{P})$ и $Law(\cdot|\mathbb{P}^{\mu-r+\delta})$ свойства процессов относительно $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}$, получаем

$$Law(W^{\mu-r+\delta}|\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}) = Law(W|\mathbb{P}). \qquad (1.11)$$

Тогда, согласно (1.2), (1.7), (1.11),

$$\begin{aligned}&Law(S_t;t\le T\,|\,\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}) =\\ &= Law(S_0\exp\{(\mu-(\sigma^2/2))t +\\ &+\sigma W_t\};t\le T\,|\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}) =\\ &= Law(S_0\exp\{(r-\delta-(\sigma^2/2))t +\\ &+\sigma W_t^{\mu-r+\delta}\};t\le T\,|\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}) =\\ &= Law(S_0\exp\{(r-\delta-(\sigma^2/2))t+\sigma W_t\};t\le T\,|\mathbb{P}).\end{aligned} \qquad (1.12)$$

Таким образом, $Law(S(\mu,r,\delta)|\mathbb{P}^{\mu-r+\delta})=Law(S(\mu,r,\delta)|\mathbb{P})$, т.е. вероятностные свойства процесса $S(\mu,r,\delta)$, определяемого уравнением

$$d_tS_t(\mu,r,\delta) = S_t(\mu,r,\delta)((r-\delta)dt + \sigma dW_t^{\mu-r+\delta}),$$

относительно $\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}$ совпадают со свойствами процесса $S(r,\delta)$, определяемого уравнением

$$d_tS_t(r,\delta) = S_t(r,\delta)((r-\delta)dt + \sigma dW_t), \qquad (1.13)$$

относительно меры $\mathbb{P}$.

Задача: сформировать портфель $\pi_t(\delta)=(\beta_t(\delta),\gamma_t(\delta))$ таким образом, чтобы формирование капитала согласно (1.3) в конечный момент времени T обеспечило выполнение платежного условия $X_T=f_T(S)$, где

$$f_T(S) = S_T - \min_{0\le t\le T} S_t \qquad (1.14)$$

является платежной функцией с последействием в случае опциона купли (колл – опцион) [3].

В данной работе: 1) находится формула, определяющая рациональную (справедливую) стоимость опциона $C_T(\delta)$, как начального капитала $X_0=x$, при котором достигается выполнение платежного условия; 2) находятся формулы, определяющие эволюцию текущего капитала $X_t(\delta)$ и портфеля $\pi_t(\delta)=(\beta_t(\delta),\gamma_t(\delta))$; 3) исследуются свойства решения.

2. Стоимость опциона

Поскольку платежная функция вида (1.14) является естественной, то [3]

$$C_T(\delta) = e^{-rT}\mathbb{E}\, f_T(S(r,\delta)). \qquad (2.1)$$

Согласно (1.1), (1.2), (1.12), (1.13)

$$\begin{aligned}S_t(r,\delta) &= S_0\exp\{(r-\delta-(\sigma^2/2))t+\sigma W_t\} =\\ &= S_0\exp\{\sigma\xi_t\},\end{aligned} \qquad (2.2)$$

$$\xi_t = W_t + (ht)/\sigma, \quad h = r-\delta-(\sigma^2/2). \qquad (2.3)$$

Далее $R=(-\infty,+\infty)$, $N\{a;b\}$ – нормальное распределение с параметрами a и b, а $\Phi(x)$ – функция Лапласа, т.е. ($\Phi(x)=N\{0;1\}$)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy.$$

Лемма 1 [2]. Пусть $\tau_x=\inf\{t\ge 0:\sigma W_t\ge x\}$, $x\in R$. Тогда процесс W_t^* такой, что

$$\sigma W_t^* = \begin{cases}\sigma W_t, & t\le\tau_x,\\ 2x-\sigma W_t, & t>\tau_x,\end{cases}$$

является винеровским процессом.

Лемма 2. Пусть $\varphi(y,z)\ge 0$ – биномиальная функция событий. Тогда

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\varphi(\min_{0\le\tau\le t}(\sigma W_\tau + h\tau), \sigma W_t + ht) =\\ &= \mathbb{E}\exp\{(h/\sigma)W_t - (h^2/2\sigma^2)t\}\varphi(\min_{0\le\tau\le t}\sigma W_\tau, \sigma W_t).\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Доказательство. Относительно теоремы Гирсанова $Y_t=\xi_t$, $b(t,Y_t)=b(t,\xi_t)=h/\sigma$, $Z_t=\exp\{-(h/\sigma)W_t-(h^2/2\sigma^2)t\}$. Тогда последовательно с учетом (1.8), (2.3) получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\varphi(\min_{\tau\le t}(\sigma W_\tau + h\tau),\sigma W_t + ht) &= \mathbb{E}^* Z_t^{-1}\varphi(\min_{\tau\le t}\sigma\xi_\tau,\sigma\xi_t) =\\ &= \mathbb{E}^*\exp\{\frac{h}{\sigma}W_t + \frac{h^2}{2\sigma^2}t\}\varphi(\min_{\tau\le t}\sigma\xi_\tau,\sigma\xi_t) =\\ &= \mathbb{E}^*\exp\{\frac{h}{\sigma}(\xi_t - \frac{h}{\sigma}t) + \frac{h^2}{2\sigma^2}t\}\varphi(\min_{\tau\le t}\sigma\xi_\tau,\sigma\xi_t) =\\ &= \mathbb{E}^*\exp\{\frac{h}{\sigma}\xi_t - \frac{h^2}{2\sigma^2}t\}\varphi(\min_{\tau\le t}\sigma\xi_\tau,\sigma\xi_t) =\\ &= \mathbb{E}\exp\{\frac{h}{\sigma}W_t - \frac{h^2}{2\sigma^2}t\}\varphi(\min_{\tau\le t}\sigma W_\tau,\sigma W_t),\end{aligned}$$

т.е. пришли к (2.4). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть для $t\le T$

$$m_t = \min_{0\le\tau\le t}\sigma\xi_\tau = \min_{0\le\tau\le t}(\sigma W_\tau + h\tau). \qquad (2.5)$$

Тогда для $x\le 0$ и $h\in R$ функция распределения $\mathbb{P}(m_t\le x)$ и плотность вероятности $p(t,x)=\partial\mathbb{P}(m_t\le x)/\partial x$ имеют вид

$$\mathbb{P}(m_t \le x) = \mathbb{P}(\min_{0\le\tau\le t}(\sigma W_\tau + h\tau) \le x) =$$
$$= \Phi\left(\frac{-x+ht}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}\right\}\Phi\left(\frac{x+ht}{\sigma\sqrt{t}}\right), \qquad (2.6)$$

$$p(t,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(-x+ht)^2}{2\sigma^2 t}\right) +$$
$$+\frac{2h}{\sigma^2}\exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}\right\}\Phi\left(\frac{x+ht}{\sigma\sqrt{t}}\right) +$$
$$+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}\right\}\exp\left(-\frac{(x+ht)^2}{2\sigma^2 t}\right). \qquad (2.7)$$

Доказательство. Пусть A и B – некоторые события. Тогда очевидно, что $A=A\cap B+A\cap\overline{B}$ и $A=B+A\cap\overline{B}$, если $B\subset A$. Пусть

$$A = (\min_{\tau\le t}(\sigma W_\tau + h\tau) \le x), \quad B = (\sigma W_t + ht < x).$$

Так как $B\subset A$, то

$$\mathbb{P}(\min_{\tau\le t}(\sigma W_\tau + h\tau) \le x) = \mathbb{P}(\sigma W_t + ht < x) +$$
$$+\mathbb{P}(\min_{\tau\le t}(\sigma W_\tau + h\tau) \le x, \sigma W_t + ht \ge x). \qquad (2.8)$$

Так как $\sigma W_t \sim N\{0,\sigma^2 t\}$, то

$$\mathbb{P}(\sigma W_t + ht < x) = \mathbb{P}(\sigma W_t < x - ht) =$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{x-ht} e^{-y^2/2\sigma^2 t}dy =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-ht}{\sigma\sqrt{t}}} e^{-z^2/2}dz = \Phi\left(\frac{x-ht}{\sigma\sqrt{t}}\right). \qquad (2.9)$$

Пусть $\varphi(\min_{\tau\le t}\sigma\xi_\tau, \sigma\xi_t) = I(\min_{\tau\le t}\sigma\xi_\tau \le x, \sigma\xi_t \ge x)$, где $I(D)$ – индикатор, т.е. $\mathbb{E}I(D)=\mathbb{P}(D)$. Тогда с учетом (2.4) и Леммы 1

$$\mathbb{P}(\min_{\tau\le t}(\sigma W_\tau + h\tau) \le x, \sigma W_t + ht \ge x) =$$
$$= \mathbb{E}\varphi(\min_{\tau\le t}\sigma\xi_\tau, \sigma\xi_t) =$$
$$= \mathbb{E}\exp\left\{\frac{h}{\sigma}W_t - \frac{h^2}{2\sigma^2}t\right\}\varphi(\min_{\tau\le t}\sigma W_\tau, \sigma W_t) =$$
$$= \mathbb{E}\exp\left\{\frac{h}{\sigma}W_t - \frac{h^2}{2\sigma^2}t\right\}I(\min_{\tau\le t}\sigma W_\tau \le x, \sigma W_t \ge x) =$$
$$= \mathbb{E}\exp\left\{\frac{h}{\sigma}W_t^* - \frac{h^2}{2\sigma^2}t\right\}I(\min_{\tau\le t}\sigma W_\tau^* \le x, \sigma W_t^* \ge x). \qquad (2.10)$$

Так как $\sigma W_t < x$ для $t < \tau_x$, то на интервале $t\in[0,\tau_x]$, где $W_t^* = W_t$, события $\{\sigma W_t^* \ge x\}$ и $\{\min_{\tau\le t}\sigma W_t^* \le x\}$ являются несовместными. Таким образом, $\sigma W_t^* < 2x - \sigma W_t$. Тогда

$$\exp\left\{\frac{h}{\sigma}W_t^* - \frac{h^2}{2\sigma^2}t\right\} =$$
$$= \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2} - \frac{h^2}{2\sigma^2}t\right\}\exp\left\{-\frac{h}{\sigma}W_t\right\}, \qquad (2.11)$$

$$I(\min_{\tau\le t}\sigma W_\tau^* \le x, \sigma W_t^* \ge x) =$$
$$= I(\min_{\tau\le t}\sigma W_\tau \le x, \sigma W_t \le x) = I(\sigma W_t \le x),$$

и из (2.10), (2.11) следует

$$\mathbb{P}(\min_{\tau\le t}(\sigma W_\tau + h\tau) \le x, \sigma W_t + ht \ge x) =$$
$$= \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2} - \frac{h^2}{2\sigma^2}t\right\}\mathbb{E}\exp\left\{-\frac{h}{\sigma}W_t\right\}I(\sigma W_t \le x). \quad (2.12)$$

Так как $I(\sigma W_t \le x) = I(W_t \le (x/\sigma))$, а $W_t \sim N\{0;t\}$, то

$$\mathbb{E}\exp\left\{-\frac{h}{\sigma}W_t\right\}I(\sigma W_t \le x) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{x/\sigma}\exp\left\{-\frac{h}{\sigma}y\right\}\exp\left\{-\frac{y^2}{2t}\right\}dy. \qquad (2.13)$$

Утверждение 1. Если

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}}\int\exp\{cx\}\exp\{-(x-a)^2/2d\}dx, \quad (2.14)$$

то

$$J = \exp\left\{ca + \frac{c^2 d}{2}\right\}\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi d}}\int\exp\left\{-\frac{[x-(a+cd)]^2}{2d}\right\}dx. \quad (2.15)$$

Пусть $X \sim N\{a;d\}$. Тогда

$$\mathbb{E}\exp\{cX\}I(X \le b) =$$
$$= \exp\{ca + (c^2 d/2)\}\Phi((b-(a+cd))/\sqrt{d}), \quad (2.16)$$

$$\mathbb{E}\exp\{cX\}I(X \ge b) =$$
$$= \exp\{ca + (c^2 d/2)\}\Phi(-(b-(a+cd))/\sqrt{d}). \quad (2.17)$$

Представление (2.15) для J следует из (2.14) в результате элементарных преобразований, (2.16) следует непосредственно из (2.14), (2.15), а (2.17) – из (2.16) с учетом того, что $1-\Phi(z)=\Phi(-z)$.

Применение (2.16) к (2.13) дает, что

$$\mathbb{E}\exp\{-(h/\sigma)W_t\}I(\sigma W_t \le x) =$$
$$= \exp\{h^2 t/2\sigma^2\}\Phi((x+ht)/\sigma\sqrt{t}). \qquad (2.18)$$

Использование (2.18) в (2.12) дает, что

$$\mathbb{P}(\min_{\tau\le t}(\sigma W_\tau + h\tau) \le x, \sigma W_t + ht \ge x) =$$
$$= \exp\{2hx/\sigma^2\}\Phi((x+ht)/\sigma\sqrt{t}). \qquad (2.19)$$

Подстановка (2.9), (2.19) в (2.8) приводит к (2.6), откуда непосредственно следует (2.7). Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть

$$d_1(\delta,t) = \left(\frac{r-\delta}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}, \qquad (2.20)$$

$$d_2(\delta,t) = \left(\frac{r-\delta}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}. \qquad (2.21)$$

Тогда

$$C_T(\delta) = S_0\{e^{-\delta T}\Phi(d_1(\delta)) - e^{-rT}\Phi(d_2(\delta)) +$$
$$+\frac{\sigma^2}{2(r-\delta)}e^{-rT}[\Phi(d_2(\delta)) - e^{(r-\delta)T}\Phi(-d_1(\delta))]\}, \quad (2.22)$$

где $d_1(\delta)=d_1(\delta,t)$, $d_2(\delta)=d_2(\delta,t)$ при $t=0$.

Доказательство. Из (2.1) с учетом (1.14), (2.2), (2.3), (2.5) последовательно получаем

$$C_T(\delta)=e^{-rT}\mathbb{E}(S_T(r,\delta)-\min_{0\le t\le T}S_t(r,\delta))=$$
$$=S_0e^{-rT}\left[e^{-\delta T}\mathbb{E}\exp\left\{\sigma W_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\}-\right.$$
$$\left.-\mathbb{E}\exp\left\{\min_{0\le t\le T}\left(\sigma W_t+\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\right\}\right]=$$
$$=S_0e^{-rT}[e^{-\delta T}e^{rT}-\mathbb{E}e^{m_T}].$$

Итак,

$$C_T(\delta)=S_0[e^{-\delta T}-e^{-rT}\mathbb{E}e^{m_T}]=$$
$$=S_0\left[e^{-\delta T}-e^{-rT}\int_{-\infty}^{0}e^xp(T,x)dx\right]. \quad (2.23)$$

Используя (2.7) в (2.23), получаем

$$C_T(\delta)=$$
$$=S_0\left\{e^{-\delta T}-e^{-rT}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\times\right.\right.$$
$$\times\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{(-x+hT)^2}{2\sigma^2T}+x\right\}dx+$$
$$+\frac{2h}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}+x\right\}\Phi\left(\frac{x+hT}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx+$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2T}+x+\frac{2hx}{\sigma^2}\right\}dx\right]\right\}. \quad (2.24)$$

Вычисление интегралов в (2.24) (см. Приложение) приводит к (2.22). Теорема доказана.

3. Портфель и капитал

Теорема 2. Капитал $X_t(\delta)$ и портфель $\pi_t(\delta)=(\gamma_t(\delta),\beta_t(\delta))$ определяются формулами

$$X_t(\delta)=S_t\{e^{-\delta(T-t)}\Phi(d_1(\delta,t))-$$
$$-e^{-r(T-t)}\Phi(d_2(\delta,t))+\frac{\sigma^2}{2(r-\delta)}\times$$
$$\times e^{-r(T-t)}[\Phi(d_2(\delta,t))-e^{(r-\delta)(T-t)}\Phi(-d_1(\delta,t))]\}, \quad (3.1)$$

$$\gamma_t(\delta)=e^{-\delta(T-t)}\Phi(d_1(\delta,t))-$$
$$-e^{-r(T-t)}\Phi(d_2(\delta,t))+\frac{\sigma^2}{2(r-\delta)}\times$$
$$\times e^{-r(T-t)}[\Phi(d_2(\delta,t))-e^{(r-\delta)(T-t)}\Phi(-d_1(\delta,t))], \quad (3.2)$$

$$\beta_t(\delta)=0. \quad (3.3)$$

Доказательство. Из [3] следует

$$X_t(\delta)=e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[f_T(S(r,\delta))|S_t]=e^{-r(T-t)}F_{T-t}(S_t), \quad (3.4)$$

$$\gamma_t(\delta)=e^{-r(T-t)}\frac{\partial F_{T-t}(s)}{\partial s}(S_t), \quad (3.5)$$

$$\beta_t(\delta)=\frac{1}{B_T}\left[F_{T-t}(S_t)-S_t\frac{\partial F_{T-t}(s)}{\partial s}(S_t)\right]. \quad (3.6)$$

Из (2.1) и (3.4) следует, что вычисления по нахождению $F_{T-t}(s)$ аналогичны вычислениям по нахождению $C_T(\delta)$ с заменой S_0 на s, T на $(T-t)$ и $\sqrt{T}$ на $\sqrt{T-t}$. Таким образом, получаем

$$F_{T-t}(s)=s\{e^{-\delta(T-t)}\Phi(d_1(\delta,t))-$$
$$e^{-r(T-t)}\Phi(d_2(\delta,t))+\frac{\sigma^2}{2(r-\delta)}\times$$
$$\times e^{-r(T-t)}[\Phi(d_2(\delta,t))-e^{(r-\delta)(T-t)}\Phi(-d_1(\delta,t))]\}. \quad (3.7)$$

Использование (3.7) в (3.4)–(3.6) приводит к (3.1)–(3.3). Теорема доказана.

4. Свойства решения

I. Утверждение 2 [5]. В случае стандартного опциона купли, когда $f_T(S)=\max(S_T-K,0)$, где K – оговоренная цена продажи владельцем опциона рискового актива в момент исполнения T, решение имеет вид:

$$\tilde{C}_T(\delta)=S_0e^{-\delta T}\Phi(\tilde{d}_1(\delta))-Ke^{-rT}\Phi(\tilde{d}_2(\delta)), \quad (4.1)$$

$$\tilde{X}_t(\delta)=S_te^{-\delta(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1(\delta,t))-Ke^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2(\delta,t)), \quad (4.2)$$

$$\tilde{\gamma}_t(\delta)=e^{-\delta(T-t)}\Phi(\tilde{d}_1(\delta,t)),$$
$$\tilde{\beta}_t(\delta)=-(K/B_T)\Phi(\tilde{d}_2(\delta,t)), \quad (4.3)$$

$$\tilde{d}_1(\delta,t)=[\ln(S_t/K)+$$
$$+(r-\delta+(\sigma^2/2))(T-t)]/\sigma\sqrt{T-t}, \quad (4.4)$$

$$\tilde{d}_2(\delta,t)=[\ln(S_t/K)+$$
$$+(r-\delta+(\sigma^2/2))(T-t)]/\sigma\sqrt{T-t}. \quad (4.5)$$

Сравним $C_T(\delta)$ и $\tilde{C}_T(\delta)$ при $K=S_0$, когда цена исполнения в случае стандартного опциона равна начальной цене рискового актива. Из (2.20), (2.21), (4.4) и (4.5) следует, что в этом случае $\tilde{d}_1(\delta)=d_1(\delta)$, $\tilde{d}_2(\delta)=d_2(\delta)$ и формула (4.1) принимает вид

$$\tilde{C}_T(\delta)=S_0[e^{-\delta T}\Phi(d_1(\delta))-e^{-rT}\Phi(d_2(\delta))]. \quad (4.6)$$

Тогда согласно (2.22), (4.8)

$$C_T(\delta)=\tilde{C}_T(\delta)+S_0\frac{\sigma^2}{2(r-\delta)}\times$$
$$\times e^{-rT}[\Phi(d_2(\delta))-e^{(r-\delta)T}\Phi(-d_1(\delta))]=\tilde{C}_T(\delta)+\Delta C_T(\delta).$$

Из (2.20), (2.21) и свойства $\Phi(y_2)>\Phi(y_1)$ при $y_2>y_1$ следует, что $\Delta C_T(\delta)>0$, т.е. $C_T(\delta)>\tilde{C}_T(\delta)$. Следовательно, при $K=S_0$ цена опциона купли с последействием всегда больше цены стандартного опциона купли. Очевидно, что при цене исполнения опциона, равной $\min_{0\le t\le T}S_t$, риск его неисполнения ниже, нежели при цене исполнения $K=S_0$. Поскольку за меньший риск необходимо больше платить, то этим и объясняется полученное свойство.

II. Если в случае стандартного опциона капитал формируется из рисковых и безрисковых активов ($\tilde{\gamma}_t(\delta)\neq0,\tilde{\beta}_t(\delta)\neq0$), см. (4.3), причем безрисковые активы берутся в долг ($\tilde{\beta}_t(\delta)<0$), то в случае опциона с последействием капитал формируется только на основе рискового актива $\beta_t(\delta)=0$. Последнее объясняется тем, что платежная функция зависит только от цены рискового актива.

III. Теорема 3. Асимптотические свойства решения заключаются в следующем:

1. $\lim\limits_{\sigma\to 0}\gamma_t(\delta)=e^{-\delta(T-t)}-e^{-r(T-t)}$; $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\gamma_t(\delta)=e^{-\delta(T-t)}$;
2. $\lim\limits_{\sigma\to 0}X_t(\delta)=S_t(e^{-\delta(T-t)}-e^{-r(T-t)})$; $\lim\limits_{\sigma\to\infty}X_t(\delta)=S_t e^{-\delta(T-t)}$;
   $\lim\limits_{S_t\to 0}X_t(\delta)=0$; $\lim\limits_{S_t\to\infty}X_t(\delta)=\infty$;
3. $\lim\limits_{\sigma\to 0}C_T(\delta)=S_0(e^{-\delta T}-e^{-rT})$; $\lim\limits_{\sigma\to\infty}C_T(\delta)=S_0e^{-\delta T}$;
   $\lim\limits_{S_0\to 0}C_T(\delta)=0$; $\lim\limits_{S_0\to\infty}C_T(\delta)=\infty$.

Доказательство сформулированных результатов проводится непосредственно с использованием свойств функции Лапласа: $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)=0$; $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$; $\Phi(x)$ – непрерывна справа по x.

Экономическая интерпретация этих свойств очевидна: стоимость опциона равна нулю в ситуации, когда предъявлять его к исполнению не имеет смысла; стоимость опциона резко возрастает, когда он всегда будет предъявлен к исполнению.

Обозначения и терминология соответствуют принятым [1–5].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть

$$J_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{(x-hT)^2}{2\sigma^2T}+x\right\}dx. \quad (\text{П}.1)$$

Из сравнения (П.1) с (2.14), (2.17), следует: b=0, c=1, a=hT, d=σ^2T. Тогда согласно (2.17) с учетом (2.3) из (П.1) следует

$$J_1=e^{(r-\delta)T}\Phi(-\sqrt{T}(((r-\delta)/\sigma)+(\sigma/2))). \quad (\text{П}.2)$$

Пусть

$$J_2=\frac{2h}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}+x\right\}\Phi\left(\frac{x+hT}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx.$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$. Возьмем

$$u=\Phi\left(\frac{x+hT}{\sigma\sqrt{T}}\right),\quad dv=\exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}+x\right\}dx.$$

Тогда

$$du=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\left\{\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2T}\right\}dx,$$
$$v=\frac{\sigma^2}{2h+\sigma^2}\exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}+x\right\}$$

и следовательно

$$J_2=\frac{2h}{(2h+\sigma^2)}\left[\Phi\left(\frac{h\sqrt{T}}{\sigma}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}+x-\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2T}\right\}dx\right]. \quad (\text{П}.3)$$

Как и при нахождении J_1 для вычисления интеграла в (П.3) применим Утверждение 1. Из сравнения (П.3) с (2.14), (2.17) следует: b=0, c=$(2h/\sigma^2)$+1, a=$-hT$, d=σ^2T. Тогда согласно (П.2) с учетом (2.3) из (П.3) следует

$$J_2=\left(1-\frac{\sigma^2}{2(r-\delta)}\right)\times$$
$$\times\left[-e^{(r-\delta)T}\Phi\left(-\sqrt{T}\left(\frac{r-\delta}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\Phi\left(\sqrt{T}\left(\frac{r-\delta}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\right)\right]. \quad (\text{П}.4)$$

Пусть

$$J_3=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2T}+x+\frac{2hx}{\sigma^2}\right\}dx. \quad (\text{П}.5)$$

Из сравнения (П.5) с (П.3) следует, что вычисление J_3 аналогично вычислению интеграла в (П.3), т.е., согласно (П.4),

$$J_3=e^{(r-\delta)T}\,\Phi(-\sqrt{T}((r-\delta)/\sigma+\sigma/2)). \quad (\text{П}.6)$$

Использование (П.2), (П.4), (П.6) в (2.24) с учетом (2.20), (2.21) и свойства 1=$\Phi(z)$+$\Phi(-z)$ приводит к (2.22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
3. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39 (Вып. 1). – С. 80–129.
4. Ширяев А.Н. Стохастические проблемы финансовой математики // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1994. – Т. 1 (Вып. 5). – С. 780–820.
5. Аникина А.В., Демин Н.С. Нахождение и анализ свойств цены, капитала и портфеля в случае непрерывных опционов купли и продажи с выплатой дивидендов // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: Труды Междунар. конф. – Минск: БГУ, 2005. – С. 27–35.